

§1.2 空间两点间的距离公式

【学习目标】

1. 了解推导空间两点间的距离公式的过程.
2. 会应用空间两点间的距离公式, 求空间中两点间的距离.

【重点难点】

重点: 了解推导空间两点间的距离公式的过程.

难点: 会应用空间两点间的距离公式, 求空间中两点间的距离.

【导学流程】

一、问题导入

距离是几何中的基本度量, 在平面解析几何中, 已知 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, 线段 P_1P_2 的长度为 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, 那么在空间直角坐标系中, 若 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 线段 P_1P_2 的长度与其坐标又有怎样的关系呢?

二、探究新知

◇探究一 空间两点间的距离公式

问题 1 在空间直角坐标系中, 点 $O(0,0,0)$ 到点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的距离怎么求?

问题 2 空间任意两点 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 间的距离怎么求?

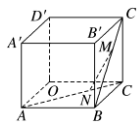
【知识梳理】

已知空间中 $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ 两点, 则 P, Q 两点间的距离 $|PQ| = \underline{\hspace{2cm}}$.

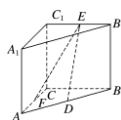
注意点:

- (1) 公式特征: 同名坐标差的平方和的算术平方根.
- (2) 在空间中, 点 $P(x, y, z)$ 到坐标原点 O 的距离 $|OP| = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (3) $x^2+y^2+z^2=1$ 表示以原点为球心, 半径为 1 的球的方程.

例 1 如图正方体 $OABC-D'A'B'C'$ 棱长为 a , $|AN|=2|CN|$, $|BM|=2|MC'|$. 求 $|MN|$ 的长.



跟踪训练 1 如图所示, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $|C_1C|=|CB|=|CA|=2$, $AC \perp CB$, D, E 分别是棱 AB, B_1C_1 的中点, F 是 AC 的中点, 求 DE, EF 的长度.



◇探究二 求空间点的坐标

例2 设点 P 在 x 轴上，它到 $P_1(0, \sqrt{2}, 3)$ 的距离是到点 $P_2(0, 1, -1)$ 的距离的 2 倍，求点 P 的坐标.

跟踪训练2 已知点 P_1, P_2 的坐标分别为 $(3, 1, -1), (2, -2, -3)$ ，分别在 x, y, z 轴上取点 A, B, C ，使它们与 P_1, P_2 两点距离相等，求 A, B, C 的坐标.

◇探究三 空间两点间距离公式的综合应用

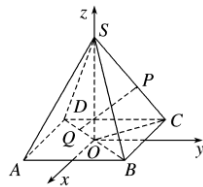
例3 已知正方形 $ABCD, ABEF$ 的边长都是 1，且平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$ ，点 M 在 AC 上移动，点 N 在 BF 上移动，若 $|CM| = |BN| = a (0 < a < \sqrt{2})$.

(1)求 $|MN|$ 的长；

(2)当 a 为何值时， $|MN|$ 的长最小.

跟踪训练3 (1)已知 $A(4, 3, 1), B(7, 1, 2), C(5, 2, 3)$ ，则 $\triangle ABC$ 是_____三角形.

(2)在正四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面边长为 a ，侧棱长也为 a ，以底面中心 O 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系， P 点在侧棱 SC 上， Q 点在底面 $ABCD$ 的对角线 BD 上，试求 P, Q 两点间的最小距离.



三、随堂演练

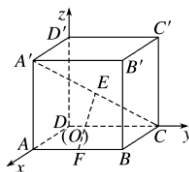
1. 点 $P(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ 到原点 O 的距离是()

- A. 6 B. $\sqrt{6}$ C. 4 D. $\sqrt{2}$

2. 已知点 $A(x, 1, 2)$ 和点 $B(2, 3, 4)$ ，且 $|AB| = 2\sqrt{6}$ ，则实数 x 的值是()

- A. -2 B. 6 C. -2 或 6 D. 4

3. 如图，在空间直角坐标系中，有一棱长为 a 的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ ， $A'C$ 的中点 E 与 AB 的中点 F 的距离为_____.



4. 已知点 $A(1, a, -5), B(2a, -7, -2)$ ，则 $|AB|$ 的最小值为_____.

四、课堂小结

1. 知识清单：

(1)两点间的距离公式的推导.

(2)利用两点间距离公式求距离.

(3)距离中的最值问题.

2. 方法归纳：函数法求最值.

3. 常见误区：由于点的坐标寻找不正确，而导致距离求解错误.

五、布置作业（课时对点练）

基础巩固

1. 已知空间两点 $A(3,3,1)$, $B(-1,1,5)$, 则线段 AB 的长度为()

- A. 6 B. $2\sqrt{6}$ C. $4\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{14}$

2. 在空间直角坐标系中，一定点到三个坐标平面的距离都是 2，那么该定点到原点的距离是()

- A. $\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

3. 在空间直角坐标系中，点 A 在 z 轴上，它到点 $P(0, \sqrt{2}, 3)$ 的距离等于它到点 $Q(0, 1, -1)$ 的距离，那么点 A 的坐标是()

- A. $(0,0,1)$ B. $(0,0,2)$
C. $(0, 0, \frac{9}{8})$ D. $(0, 0, \frac{8}{9})$

4. $\triangle ABC$ 的顶点坐标是 $A(3,1,1)$, $B(-5,2,1)$, $C(-\frac{8}{3}, 2, 3)$, 则它在 yOz 平面上的投影图形的面积是()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

5. 一束光线自点 $P(1,1,1)$ 发出，遇到 xOy 平面被反射，到达点 $Q(3,3,6)$ 被吸收，那么光所走的路程是()

- A. $\sqrt{37}$ B. $\sqrt{47}$ C. $\sqrt{33}$ D. $\sqrt{57}$

6. 在空间直角坐标系中，已知点 $A(3,1,2)$, $B(-1, -2,1)$ 及动点 $M(x, y, -1)$, 则 $|AM|+|BM|$ 的最小值为()

- A. $\sqrt{26}$ B. $\sqrt{34}$
C. $5\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{41}+\sqrt{61}}{2}$

